Bøker på bøker

En bokorms øvelse i stabling

Ivar Farup

Høgskolen i Gjøvik
Postboks 191
N–2802 Gjøvik
ivar.farup@hig.no

Innledning

For en tid siden ble jeg konfrontert med følgende problemstilling:

> Anta at vi har ubegrenset tilgang til identiske bøker, samt et bord å stable dem på. Er det mulig, ved ikke å legge bøkene nøyaktig oppå hverandre, å stable bøkene slik at den øverste boken i sin helhet ligger utenfor bordplaten. Isåfall, hvor mange bøker skal til?

I utgangspunktet antok jeg at dette var en mye benyttet oppgave i matematikkundervisningen, og lette dermed litt rundt i både papirbaserte og elektroniske arkiver i håp om å finne svaret. Da dette viste seg fåfengt, bestemte jeg meg for å gå saken litt nærmere etter i sømmene. Man skulle jo tro dette var noe som enkelt skulle kunne besvares vha. elementær matematikk?

Ganske riktig – i det følgende presenteres resultatene av denne lille undersøkelsen, angrepet fra tre litt forskjellige vinkler.

Det opprinnelige problemet

Anta først at identiske bøker er stablet oppå hverandre slik at de akkurat balanserer. Vi nummererer bøkene ovenfra slik at øverste bok er bok 0. Videre innfører vi koordinatsystemet slik at posisjonen til massesenteret til bok 0 er $x_0 = 0$. Bøkene har lengde 1 (skalering). Horisontalkomponenten til massesenteret for bøkene 0 til n blir da

$$c_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k,$$

der x_k er den horisontale posisjonen til massesenteret til bok k.

Kravet om at bøkene akkurat skal balansere kan formuleres som

$$x_n = c_{n-1} + \frac{1}{2}\,, \tag{1}$$

altså at massesenteret til de n øverste bøkene (bok 0 til $n-1$) må ligge på kanten av bok n, som altså er i avstand 1/2 fra bokens massesenter. For $n \geq 2$ får vi dermed

$$\begin{aligned}
x_n &= c_{n-1} + \frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k + \frac{1}{2}\\
&= \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=0}^{n-2} x_k + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{n}x_{n-1} - \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{2}\\
&= \frac{n-1}{n}\left(c_{n-2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{n}x_{n-1} + \frac{1}{2n}\\
&= \frac{n-1}{n}\,x_{n-1} + \frac{1}{n}x_{n-1} + \frac{1}{2n}\\
&= x_{n-1} + \frac{1}{2n}\,.
\end{aligned}$$

At denne resultatet også gjelder for $n = 1$ (selv om utledningen over ikke gjør det) sees umiddelbart fra ligning (1), så vi har følgende rekursjonsformel for posisjonen til bok n:

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2n} \quad \text{for } n \geq 1, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Rekursjonsformelen (2) har løsning

$$x_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \quad \text{for } n \geq 1, \tag{3}$$

hvilket kan bevises vha. matematisk induksjon: For $n = 1$ gir rekursjonsformelen

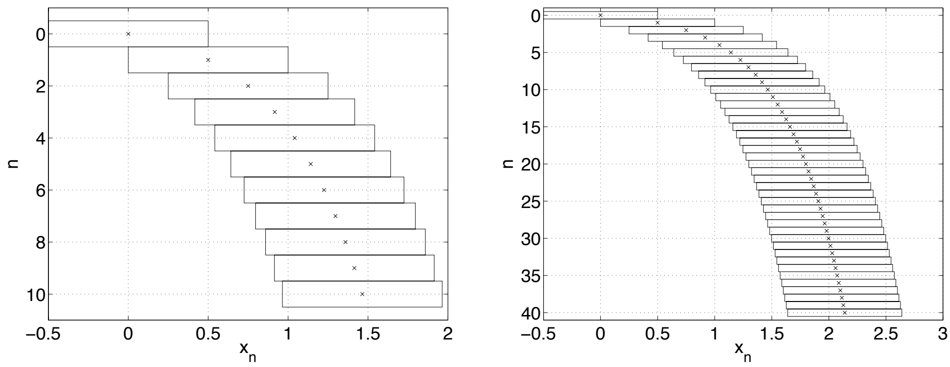
$$x_1 = x_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

mens summeformelen gir

$$x_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}\,.$$

Induksjonstrinnet er

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\,.$$



Figur 1: Posisjonen x_n til bok n for henholdsvis 10 og 40 bøker. Grafen er orientert slik at den samtidig illustrerer bokstabelens form, illustrert med rektangler.

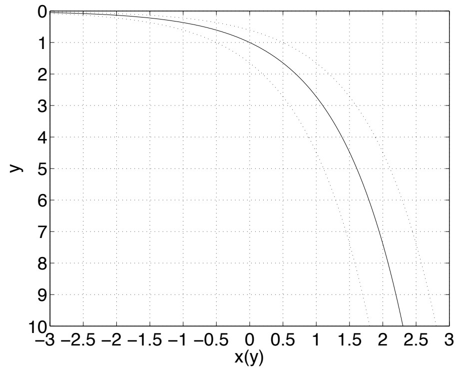
Tabell 1: Antall bøker som trengs for å komme et helt antall boklengder utenfor kanten av bordet.

Antall boklengder utenfor	Antall bøker
1	4
2	31
3	227
4	1 674
5	12 367
6	91 380
7	675 214
8	4 989 191
9	36 865 412
10	272 400 600

Siden rekken (3) ikke konvergerer når $n \to \infty$, er det altså mulig å komme vilkårlig langt unna bordet bare man har mange nok bøker til rådighet (vi er altså pragmatiske nok til å se bort fra inhomogeniteter i gravitasjonsfeltet samt muligheten for gravitasjonskollaps ved for store bokmasser). Dessverre for bokstableren er divergensen imidlertid så langsom at man trenger uhyre mange bøker om man ønsker å kunne legge en bok mange boklengder utenfor bordplaten. I figur 1 er x_n plottet mot n. Vi ser at det er nok med fire bøker for å få en boklengde utenfor, mens det trengs hele 31 bøker for å nå to boklengder. Tabell 1 gir oversikt over det videre forløpet.

Grensen for veldig tynne bøker

Det er interessant (om ikke nødvendigvis så nyttig) å spørre seg om denne problemstillingen har en kontinuerlig analogi. Vi kan studere dette ved å se på hva som skjer i grensen når boktykkelsen går mot null.



Figur 2: Posisjonen $x(y)$ til boken i høyde y. Grafen er orientert slik at den samtidig illustrerer bokkontinuets form. De stiplede linjene illustrerer stabelens ytterside.

Vi lar x-aksen være som før, og innfører en y-akse som vokser nedover. Vi er altså ute etter funksjonen $x(y)$. Vi lar nå Δy betegne boktykkelsen. Da er sammenhengen mellom bok nummer n og avstand y fra toppen av stabelen gitt som

$$y = n\Delta y.$$

Rekursjonsformelen (2) kan da skrives

$$\begin{aligned} x(y) &= x(y-\Delta y) + \frac{\Delta y}{2y} \\ \Rightarrow \quad \frac{x(y)-x(y-\Delta y)}{\Delta y} &= \frac{1}{2y}\,. \end{aligned}$$

Om vi nå tar grensen $\Delta y \to 0$, får vi

$$x'(y) = \frac{1}{2y}\,,$$

som kan integreres for $y > 0$:

$$x(y) = \frac{1}{2}\ln y + C.$$

Konstanten C tilsvarer en horisontal forskyvning av stabelen, og kan dermed velges fritt. Vi kan f.eks. velge $C = 0$ som gir $x(1) = 0$:

$$x(y) = \frac{1}{2}\ln y.$$

Vi kan imidlertid ikke velge C slik at $x(0) = 0$, slik vi kunne i det diskrete tilfellet, siden $\ln y$ ikke er definert for $y = 0$. Den «kontinuerlige stabelen» er vist i figur **??**.

Et såvidt balanserende kontinuerlig legeme

Resultatet over kan vi også komme frem til ved å resonnere kontinuerlig fra begynnelsen av. En problemstilling vil f.eks. kunne være:

> Finnes det et todimensjonalt kontinuerlig legeme som «akkurat balanserer» i den forstand at den bærer all vekt på den ene siden? Isåfall vil man kunne kan dele dette legemet horisontalt i en vilkårlig høyde, og den øverste delen vil da akkurat balansere på ytterkanten av den nederste.

Om vi innfører koordinatsystem som over, er vi igjen ute etter funksjonen $x(y)$. Massesenteret for den øverste delen av legemet ($y > 0$) blir nå et integral:

$$c(y) = \frac{1}{y} \int_0^y x(\tau)\, d\tau,$$

og betingelsen om balanse blir som før:

$$x(y) = c(y) + \frac{1}{2}\,.$$

Vi får dermed følgende integralligning for $x(y)$:

$$x(y) = \frac{1}{y} \int_0^y x(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2}\,.$$

Multiplikasjon med y, derivasjon, noe bearbeidelse og integrasjon gir

$$\begin{aligned} & yx(y) - \int_0^y x(\tau)\, d\tau - \frac{y}{2} = 0 \\ \Rightarrow \quad & x(y) + yx'(y) - x(y) - \frac{1}{2} = 0 \\ \Rightarrow \quad & x'(y) = \frac{1}{2y} \\ \Rightarrow \quad & x(y) = \frac{1}{2} \ln y + C. \end{aligned}$$

Som over kan vi velge $C = 0$, og er dermed tilbake til samme resultat igjen:

$$x(y) = \frac{1}{2} \ln y.$$

Konklusjon

Problemet med bokstabelen lot seg altså løse med relativt enkle matematiske hjelpemidler og på forskjellige måter. Oppgaven er fengende og lar seg også studere i praksis, og er således godt egnet som et lite matematikkprosjekt for dyktige sisteårselever i den videregående skole, eventuelt for førsteårsstudenter i tekniske og naturvitenskapelige fag.